Corrigé

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.
Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.
Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.
On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020+n$.
On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2000$.

1. Diminuer de 10 % c'est multiplier par $1 - \dfrac{10}{100} = 1 - 0,10 = 0,9$.
   On multiplie donc l'effectif de l'année n, u_n par 0,9 puis on augmente cet effectif de 100 : on a donc

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 100.$$

2. • $u_0 = 2000$,d'où $u_1 = 0,9 \times 2000 + 100 = 1800 + 100 = 1900$;
   • $u_1 = 1900$,d'où $u_2 = 0,9 \times 1900 + 100 = 1710 + 100 = 1810$.
3. *Initialisation* : $1000 < 1900 \leqslant 2000$, soit $1000 < u_1 \leqslant u_0$: l'encadrement est vrai au rang $n = 0$.
   Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $1000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.
   En multipliant chaque membre par 0,9, on obtient : $0,9 \times 1000 < 0,9 \times u_{n+1} \leqslant 0,9 \times u_n$ puis en ajoutant 100 à chaque membre on obtient :
   $900 + 100 < 0,9u_{n+1} + 100 \leqslant 0,9u_n + 100$, soit :
   $1000 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.
   L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang n, il l'est encore au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n : $1000 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

4. La récurrence précédente montre que :

   — la suite (u_n) est décroissante $(u_{n+1} \leqslant u_n)$;
   — la suite (u_n) est minorée par 1 000

   La suite (u_n) converge.
5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1000$.
   a. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000$, soit $v_{n+1} = 0,9u_n + 100 - 1000$, ou encore $v_{n+1} = 0,9u_n - 900 = 0,9(u_n - 1000)$ et enfin :

$$v_{n+1} = 0,9v_n.$$

Cette égalité vraie pour tout naturel n montre que la suite (v_n) rdt une suite géométrique de raison 0,9.

b. On a donc $v_0 = u_0 - u_0 - 1000 = 2000 - 1000 = 1000$.

On sait que pour tout naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$ (avec $q = 0,9$), soit $v_n = 1000 \times 0,9^n$.

Or $v_n = u_n - 1000 \iff u_n = v_n + 1000$, soit $u_n = 1000 \times 0,9^n + 1000 = 1000\left(1 + 0,9^n\right)$.

c. Comme $0 < 0,9 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + 0,9^n = 1$ et par conséquent :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1000.$$

Cela signifie qu'au bout de nombreuses années la population va se rapprocher de 1 000 individus.

6. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec $S > 1000$).

a. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 1020$.

On a $u_n \leqslant 1020 \iff 1000\left(1 + 0,9^n\right) \leqslant 1020 \iff 1000 + 1000 \times 0,9^n \leqslant 1020$

$\iff 1000 \times 0,9^n \leqslant 20 \iff 0,9^n \leqslant 0,02 \iff n \ln 0,9 \leqslant \ln 0,02 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0,02}{\ln 0,9}$

(car $\ln 0,9 < 0$).

La calculatrice donne $\dfrac{\ln 0,02}{\ln 0,9} \approx 37,1$, donc le plus petit entier tel que $u_n \leqslant 1020$ est $n = 38$ $(u_{38} \approx 1018,25)$.

b.

```
def population(S) :
  n=0
  u=2000

  while u >1020:
    u= 0.9*u+100
    n = n + 1
  return n
```